

3. Διανύσματα

Εξείδωρα διανύσματα:

Είναι προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα. Στο άνω $\sqrt{3}$ των διανυσμάτων έχουμε μια σχέση ισοζυγίας:

$$\vec{v} = \vec{w} \quad \text{αν} -v \quad \vec{v} / \vec{w}$$

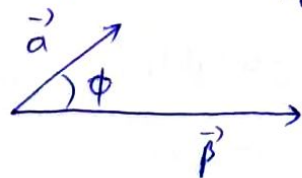
- ίδιο μήκος
- ίδια διεύθυνση
- ίδια φορά

Αποδείξουμε ότι ο V_3 είναι διανυσματικός χώρος ισοβαρής με τον $\mathbb{R}^3$. Ίσως σε κάθε τέτοιο διάνυσμα $\vec{v}$ αντιστοιχεί μια τριάδα αριθμών.

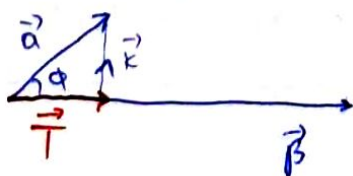
Διότι $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$.

Μπορούμε να ορίσουμε με "γεωμετρικό τρόπο" το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων. Θα μπορούσαμε να ορίσουμε

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos(\hat{\vec{a}}, \vec{b})$$



Εφαρμογή: Ας υποθέσουμε ότι $\vec{a}, \vec{b}$ δύο διανύσματα με κοινή αρχή. Θέλουμε να βρούμε την ορθογώνια προβολή $\vec{T}$ του $\vec{a}$ στο $\vec{b}$.



Επειδή το $\vec{T}$ είναι παράλληλο με το $\vec{\beta}$, υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\vec{T} = \lambda \vec{\beta}$.
 Αρκεί να υπολογίσουμε το λ .

Έστω $\vec{k}$ το κάθετο διάνυσμα στο το πέρασ των
 $\vec{\alpha}$ στο $\vec{\beta}$, έχουμε ότι $\boxed{\vec{\alpha} = \vec{T} + \vec{E} = \lambda \vec{\beta} + \vec{E}}$

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με $\vec{\beta}$ έχουμε

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \lambda \langle \vec{\beta}, \vec{\beta} \rangle + \langle \vec{E}, \vec{\beta} \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \lambda \|\vec{\beta}\|^2 \Rightarrow \lambda = \frac{\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle}{\|\vec{\beta}\|^2} \quad \text{Άρα} \quad \boxed{\vec{T} = \frac{\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle}{\|\vec{\beta}\|^2} \cdot \vec{\beta}}$$

Μπορούμε να ορίσουμε εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων

$$\vec{\alpha} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

$$\text{ως} \quad \vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 \beta_3 - a_3 \beta_2) \vec{e}_1 - (a_1 \beta_3 - a_3 \beta_1) \vec{e}_2 + (a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1) \vec{e}_3.$$

$$\text{όπου} \quad \vec{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0) \quad \text{και} \quad \vec{e}_3 = (0, 0, 1).$$

Παρατήρηση: Έστω έχουμε δύο σημεία του $\mathbb{R}^3$ $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ και $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$
 τότε το διάνυσμα $\vec{P_1 P_2}$ γράφεται ως

$$\boxed{\vec{P_1 P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)}.$$

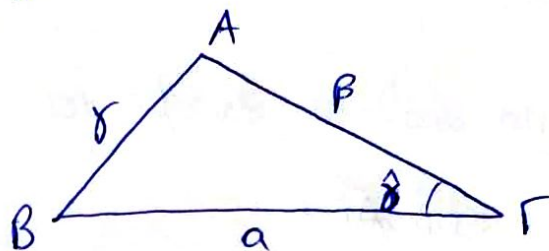


1. (αποδείγματα)

(Γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα).

① Ας υποθέσουμε ότι δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$.

Αν θεωρήσουμε τις κορυφές σαν σημεία του $\mathbb{R}^3$, τότε:



$$\begin{aligned}\vec{BA} &= \vec{BG} + \vec{GA} \\ &= \vec{GA} + \vec{BG}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{BA} = \vec{GA} - \vec{GB}}$$

Επομένως, $\gamma^2 = \|\vec{BA}\|^2 = \|\vec{GA} - \vec{GB}\|^2$

$$= \langle \vec{GA} - \vec{GB}, \vec{GA} - \vec{GB} \rangle.$$

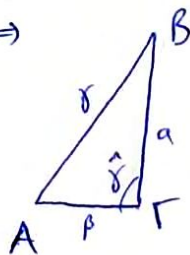
$$= \|\vec{GA}\|^2 + \|\vec{GB}\|^2 - 2\langle \vec{GA}, \vec{GB} \rangle.$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \gamma^2 &= \|\vec{GA}\|^2 + \|\vec{GB}\|^2 - 2\langle \vec{GA}, \vec{GB} \rangle \\ &= \beta^2 + \alpha^2 - 2\|\vec{GA}\|\|\vec{GB}\|\cos \hat{\gamma}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \hat{\gamma}}$$

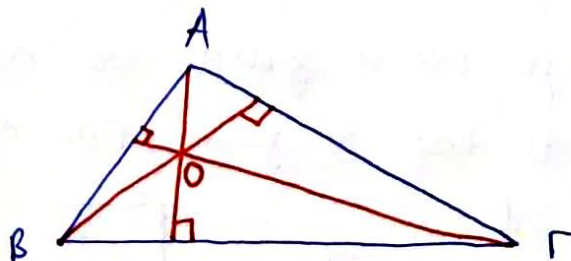
Εάν $\hat{\gamma} = \frac{\pi}{2}$ (ορθόγωνο τρίγωνο) $\Rightarrow$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$



② Τα ύψη ενός τριγώνου τέμνονται σε κοινό σημείο.

Έστω O το κοινό σημείο τομής των υψών από τα σημεία A και B .
Αρκεί ν.δ.ο. $\vec{OG}$ είναι κάθετο στο AB .



Από την υπόθεση έχουμε ότι :

$$\begin{aligned}
 0 &= \langle \vec{OA}, \vec{BG} \rangle \\
 &= \langle \vec{OA}, \vec{OG} - \vec{OB} \rangle \\
 &= \langle \vec{OA}, \vec{OG} \rangle - \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle \\
 &\Leftrightarrow \boxed{\langle \vec{OA}, \vec{OG} \rangle = \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle} \quad (1)
 \end{aligned}$$

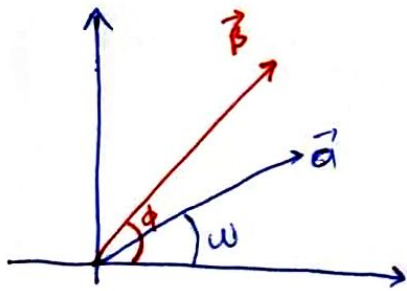
Ομοίως από υπόθεση έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 0 &= \langle \vec{OB}, \vec{AG} \rangle \\
 &= \langle \vec{OB}, \vec{OG} - \vec{OA} \rangle \\
 &\Leftrightarrow \boxed{\langle \vec{OB}, \vec{OG} \rangle = \langle \vec{OB}, \vec{OA} \rangle} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Από (1) και (2) $\Rightarrow \langle \vec{OA}, \vec{OG} \rangle = \langle \vec{OB}, \vec{OG} \rangle$
 $\Rightarrow \langle \vec{BA}, \vec{OG} \rangle = 0.$

③ Θα αποδείξουμε ότι

$$\boxed{\cos(\phi - \omega) = \cos\phi \cos\omega + \sin\phi \sin\omega}$$



Ας θεωρήσουμε δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ με μήκος 1.

Υποθέτουμε ότι η γωνία που σχηματίζει το $\vec{a}$ με το x-άξονα είναι ω και η γωνία που σχηματίζει το $\vec{b}$ με τον x-άξονα είναι ϕ .

Άρα $\boxed{(\vec{a}, \vec{b}) = \phi - \omega}$

Επειδή $\vec{a}$ και $\vec{b}$ έχουν μήκος 1 έχουμε

$$\begin{aligned}
 \vec{a} &= (\cos\omega, \sin\omega) \\
 \vec{b} &= (\cos\phi, \sin\phi).
 \end{aligned}$$

Τότε (1) $\boxed{\langle \vec{\alpha}', \vec{\beta}' \rangle = \cos \omega \cos \phi + \sin \omega \sin \phi}$

Επίσης, $\boxed{\langle \vec{\alpha}', \vec{\beta}' \rangle = \|\vec{\alpha}'\| \|\vec{\beta}'\| \cos(\phi - \omega)} \quad (2)$

$\xrightarrow{(1) \text{ και } (2)}$ $\boxed{\cos(\phi - \omega) = \cos \phi \cos \omega + \sin \phi \sin \omega}$

§ Επιφάνειες - Καμπύλες

Δίνεται μια ανώρτια $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τρεις μεταβλητές. Ένα αλφειο. $P(x, y, z)$ του $\mathbb{R}^3$ λέγεται λύση της εξίσωσης

$$\boxed{f(x, y, z) = 0}$$

Εαν $f(x, y, z) = 0$. Το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης

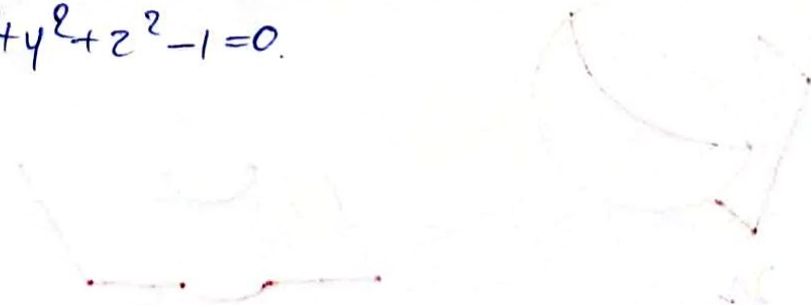
$f(x, y, z) = 0$ θα λέγεται επιφάνεια.

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε την εξίσωση $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

Το αλφειο του $\mathbb{R}^3$ που πληρούν την εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ αποτελούν επιφάνεια. Για παράδειγμα τα αλφειο

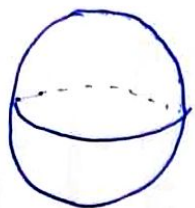
$P_1(1, 0, 0)$, $P_2(0, 1, 0)$, $P_3(0, 0, 1)$, $P_4(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ είναι λύσεις της $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.



Πρόβλημα 1: Δίνεται η εξίσωση $f(x, y, z) = 0$.

Να βρεθεί το σύνολο Σ των λύσεων της εξίσωσης και να αναγνωριστεί το γεωμετρικό σχήμα της Σ .

Πρόβλημα 2: Δίνεται ένα γεωμετρικό σχήμα Σ , όπως για παράδειγμα σφαίρα, ελλειψοειδές, κύλινδρος



Να βρεθεί εξίσωση $f(x, y, z) = 0$ της οποίας η λύση να είναι η επιφάνεια Σ .

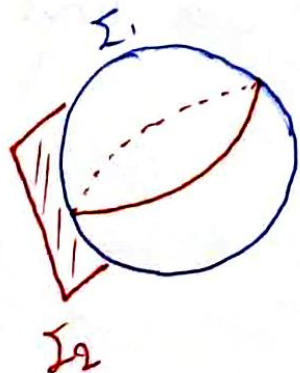
Παρατήρηση: Μια εξίσωση $f(x, y, z) = 0$ μπορεί να μην έχει καμία λύση. Υπάρχουν περιπτώσεις που έχει μόνο μια λύση.

Για παράδειγμα.

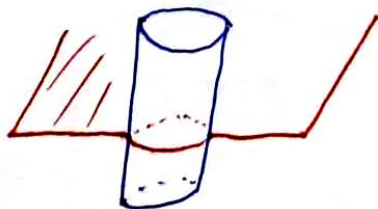
- η εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 + z = 0$ δεν έχει καμία λύση

- η εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ έχει μόνο μία λύση, των $(0, 0, 0)$.

Μια καμπύλη γενικά είναι η τομή δύο επιφανειών Σ_1 και Σ_2



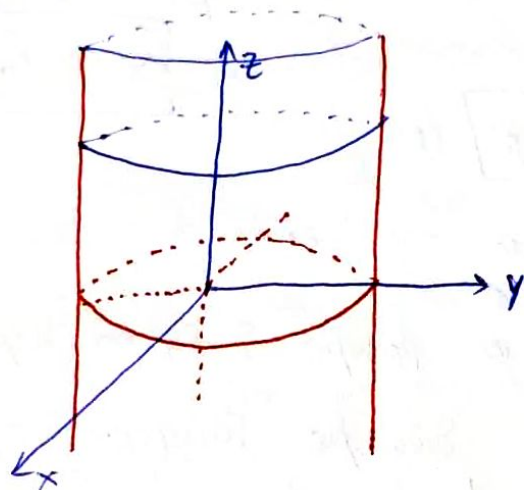
Για παράδειγμα τομή σφαίρας με ελλειψοειδές.



Να αμφιστομήσουμε καμπύλη το σύνολο λύσεων ενός συστήματος

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Παράδειγμα Η εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ στο $\mathbb{R}^3$ περιγράφει κύλινδρο.



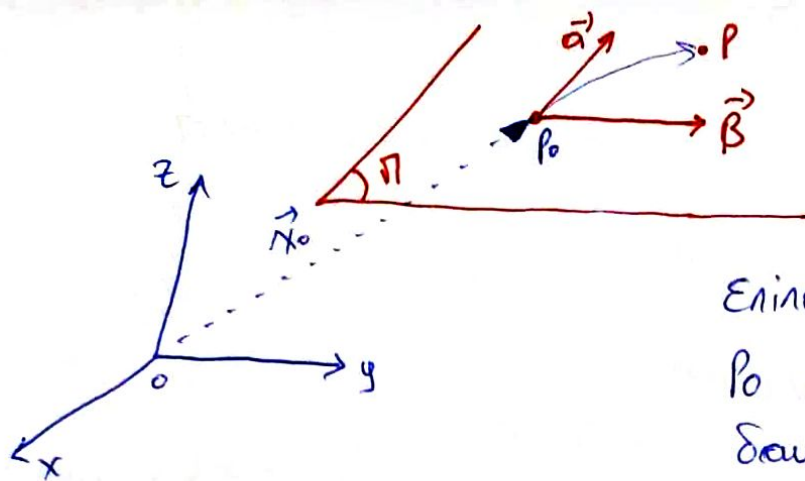
Το σύστημα $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ περιγράφει καμπύλη.

① Επίπεδο:

Ορισμός: Δίνονται ένα σημείο P_0 του $\mathbb{R}^3$ με διάνομο λύσεως ως προς την αρχή το $\vec{x}_0$ και δυο διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

$$\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \quad \text{γραμμικά ανεξάρτητα.}$$



Επιπεδο Π από το σημείο

P_0 και παράλληλο προς τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$, είναι το σύνολο των σημείων του χώρου με διάνυσμα θέσεως

$$\boxed{\vec{X} = \vec{X}_0 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Η εξίσωση $\boxed{\vec{X} = \vec{X}_0 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}} \quad (1)$

λέγεται διαφοστική εξίσωση του επιπέδου.

Παρατήρηση: Αν θέλουμε να βρούμε διάφορα σημεία του επιπέδου Π αρκεί να δώσουμε διάφορες τιμές στις παραμέτρους λ και μ .

Εάν $P(x, y, z)$ είναι τυχαίο σημείο του επιπέδου με διάνυσμα θέσεως $\vec{X}$, τότε η εξίσωση (1) λαμβάνει την μορφή

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a_1, a_2, a_3) + \mu(b_1, b_2, b_3).$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y &= y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z &= z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{aligned}} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Οι εξισώσεις (2) λέγονται παραμετρικές εξισώσεις του επιπέδου.

Επειδή τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα $\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} \neq (0, 0, 0)$.

Όμως, $\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \neq (0, 0, 0)$

Από αβραίνει ότι μπορούμε να κάνουμε αναλοισφί τω 1 και μ
 από το ωσφμα (2) και να καταλίσουμε σε μια ελίσωαι της
 μορφής.

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \quad (3)$$

με $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$.

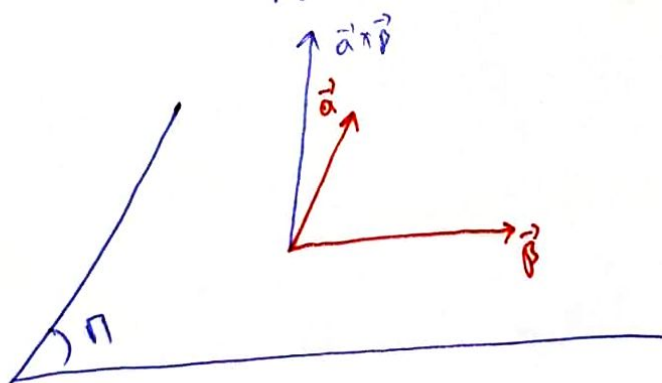
Η ελίσωαι (3) λέγεται αναλυτική ελίσωαι του ελπίεδου.

Παράδειγμα: Δίεται η ελίσωαι $\{x + y + z = 1\}$ (η)

(i) Να βρεθούν δύο διανύσματα παράλληλα στο (η).

(ii) Να βρεθεί ένα κάθετο διάνυσμα στο ελπίεδο (η).

Λύση:



τρία αμεία είναι $P_1(1, 0, 0)$
 $P_2(0, 1, 0)$
 $P_3(0, 0, 1)$

Δύο διανύσματα $\vec{a} = \vec{P_1P_2} = (-1, 1, 0)$
 $\vec{b} = \vec{P_1P_3} = (-1, 0, 1)$.

$$(i) \quad \vec{\eta} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\eta} = (1, 1, 1)$$